CAPÍTULO 3
CONCEPTOS BÁSICOS DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES

3.1 INTRODUCCIÓN

A lo largo del capítulo 2 se han expuesto un conjunto de técnicas sencillas de Estadística Descriptiva, que permiten sintetizar y poner de manifiesto las características más relevantes de las pautas de variabilidad presentes en un conjunto de datos observados.

Dichas técnicas, sin embargo, son insuficientes cuando, como sucede en la mayor parte de los casos, el objetivo del análisis es obtener conclusiones que sean válidas, con una razonable seguridad, para la población de la cual han sido extraídos dichos datos. Como ya se indicó en el capítulo 2, éste es precisamente el objeto de la Inferencia Estadística.

Autoevaluación: Asumamos que el conjunto de los 131 alumnos que respondieron a la encuesta realizada en clase constituyen una muestra representativa de los estudiantes de la UPV. El 30% de las chicas y el 20.9% de los chicos encuestados manifestaron considerarse de izquierdas. ¿Puede afirmarse a partir de estos datos, con una razonable seguridad de acertar, que en la UPV la tendencia de izquierdas es más elevada en las chicas que en los chicos?
Un 67.2% de los encuestados dieron un número impar cuando se les pidió que escribieran un dígito al azar. ¿Hasta qué punto esta proporción tan elevada es una casualidad? ¿Puede, por el contrario, afirmarse con razonable seguridad que existe en la población una tendencia a escoger preferentemente números impares?
En las cuestiones anteriores, ¿qué debe entenderse bajo la expresión "una razonable seguridad"?

Como sucede en otras ciencias, el proceso de razonamiento de la Inferencia Estadística exige el recurso a modelos matemáticos.

Asumiendo que los individuos observados, que constituyen la muestra a analizar, han sido extraídos al azar de la población estudiada, y asumiendo también que la pauta de variabilidad existente en dicha población puede representarse adecuadamente mediante ciertos modelos matemáticos, es posible calcular, bajo diferentes hipótesis respecto a la población, las probabilidades asociadas a datos como los obtenidos en la muestra. Dichas probabilidades permiten precisar la verosimilitud de las hipótesis avanzadas respecto a la población.

Autoevaluación: Suponiendo que en la población la proporción de individuos que escogen dígitos pares es la misma que la de los que escogen dígitos impares, es posible calcular, aplicando las reglas del Cálculo de Probabilidades, que la probabilidad de que de 131 individuos seleccionados al azar más del 67% escojan dígitos impares, es inferior a 6 cienmilésimas. ¿Qué se deduce del cálculo anterior y de los resultados observados en la encuesta?

El **Cálculo de Probabilidades** constituye el modelo matemático básico sobre el que se construye la Inferencia Estadística.

En el presente capítulo se introducen los elementos básicos del Cálculo de Probabilidades: los conceptos de suceso y de probabilidad, las propiedades de ésta, los conceptos de probabilidad condicional y de independencia de sucesos y el Teorema de Bayes.

El Cálculo de Probabilidades es hoy en día una rama perfectamente elaborada de las Ciencias Matemáticas, que se puede desarrollar de forma completamente rigurosa desde una base axiomática. Consideramos, sin embargo, que este enfoque no es el adecuado dentro de una asignatura de Estadística para Ingenieros, en la que una preocupación obsesiva por el rigor formal puede ahogar la comprensión intuitiva de los conceptos abstractos, que tan esencial resulta para su correcta aplicación al tratamiento de problemas reales.

En consecuencia en el presente capítulo se han obviado las definiciones formalmente rigurosas de los conceptos expuestos, para sustituirlas por ideas intuitivas que facilitan el relacionarlos con los entes reales que se manejan en la ingeniería. Igualmente se han orillado ciertas cuestiones que, siendo esenciales para un tratamiento matemático riguroso de la Teoría de la Probabilidad, resultan, al menos en nuestra opinión, de dudosa relevancia en la aplicación de dicha teoría a los problemas reales.

Los trabajos prácticos correspondientes a este capítulo no se realizarán en el aula informática, sino en la clase. Dichos trabajos consistirán en el análisis y resolución de las cuestiones planteadas en los apartados de Autoevaluación, así como de ejercicios adicionales como los que se proponen en el Anejo al final del capítulo.

3.2 SUCESOS. OPERACIONES CON SUCESOS

En el capítulo 2 se expusieron los conceptos de población y de variable aleatoria asociada a la misma. Vamos a denominar **E** al conjunto de valores que puede tomar una determinada variable aleatoria. A cualquier subconjunto **A** de a **E** se denomina Suceso.
Cada suceso lleva asociado en la población un determinado subconjunto de individuos para los que dicho suceso se verifica, que son los individuos para los cuales el valor de la variable pertenece a **A**

Ejemplo 1: Sea la población constituida por todos los lanzamientos de un determinado dado y **E** el conjunto (1, 2, 3, 4, 5 y 6) de resultados posibles. Sea el suceso "obtener un número par", al que le corresponde el subconjunto **A** = {2, 4, 6} de **E**. A dicho suceso le corresponderá en la población el subconjunto constituido por todos los lanzamientos en los que el resultado sea un número par, es decir pertenezca a **A**.

Ejemplo 2: Sea la población constituida por todos los jóvenes españoles y sea la variables aleatoria asociada, ESTATURA de cada individuo expresada en cms. **E** estará constituido por el conjunto de números reales positivos. Un suceso podría estar definido por la expresión "ESTATURA > 180" y le correspondería en **E** el subconjunto **A** de valores mayores que 180 y en la población el subconjunto de jóvenes de estatura superior a 180 cms.

Autoevaluación: Definir sucesos, precisando los subconjuntos de E y de la población asociados a los mismos, sobre los ejemplos estudiados en el capítulo anterior del consumo de energía en una factoría y de fabricación de asientos de coches.

Se denomina **suceso seguro** al asociado a **E**, que es obviamente un subconjunto de sí mismo. Al suceso seguro se le asocia la totalidad de la población, o, lo que es lo mismo, para todos los individuos de la población se verifica dicho suceso.

Se denomina **suceso imposible** al asociado al subconjunto vacío **Φ** de **E**. Dado que no contiene ninguno de los posibles valores de **E**, no existirá individuo alguno en la población para el que se verifique dicho suceso imposible **Φ**.

Dado dos sucesos se denomina **suma** o **reunión** de ambos a un nuevo suceso que se verifica si, y sólo si, se verifica al menos uno de los dos sucesos. Evidentemente el subconjunto **C** correspondiente a este nuevo suceso no es más que la reunión de los subconjuntos **A** y **B** correspondientes a los primitivos, y de forma análoga el subconjunto de individuos de la población que verifican **C** no es más que la reunión del subconjunto de los que verifican **A** y del de los que verifican **B**. Expresaremos la suma de dos sucesos utilizando el signo + (**C** = **A** + **B**)

<u>Nota</u>: auque utilicemos el mismo símbolo **+**, es obvio que la operación **suma de sucesos**, definida sobre el conjunto de los sucesos, es diferente de la operación **suma aritmética**, definida sobre el conjunto de números reales

Dado dos sucesos se denomina **producto** o **intersección** de ambos a un nuevo suceso que se presenta si, y sólo si, se presentan tanto uno como el otro suceso. Su subconjunto asociado **C** no es más que la intersección de los subconjuntos **A** y **B** correspondientes a los dos sucesos considerados. Análogamente el subconjunto de individuos que en la población verifican **C** no es más que la intersección del de los que verifican **A** con el de los que verifican **B**. Al producto de dos sucesos **A** y **B** lo representaremos como **A**.**B** o si no hay riesgo de error simplemente como **AB**.

Dos sucesos cuya intersección es el suceso imposible **Φ** se dice que son **excluyentes**, no pudiendo presentarse los dos simultáneamente en un mismo individuo.

Se denomina **suceso contrario** a uno dado a aquél que se verifica si, y sólo si, no se verifica este último. Sus subconjuntos asociados, tanto en **E** como en la población, no son más que los subconjuntos **complementarios** del los correspondientes al suceso considerado. Al suceso contrario de un suceso **A** le denominaremos $\overline{\mathbf{A}}$ o, a veces, No-**A**.

Autoevaluación: Sean los sucesos:
A : ESTATURA mayor que 175 cms (o sea, estudiante "alto")
B : SEXO = "chicas".
Definir con palabras los subconjunto de individuos de la población asociados a los siguientes sucesos:
$A + B$; AB ; $\overline{A}.\overline{B}$ *;* $\overline{A}+\overline{B}$ *;* $A.\overline{B}$.
¿Cuál sería el suceso contrario de A + B? ¿Y el de A.B? (Leyes de Morgan)

Autoevaluación: Un determinado dispositivo se fabrica a partir de dos componentes C_A y C_B. Sean los sucesos:
A: la componente C_A funciona más de 1000 horas sin fallar
B: la componente C_B funciona más de 1000 horas sin fallar
D: el dispositivo conjunto funciona más de 1000 horas sin fallar
Si las dos componentes se montan en serie (de forma que el dispositivo falla en cuando lo hace una cualquiera de las dos componentes) ¿qué relación existirá entre el suceso D y los sucesos A y B?
Si las dos componentes se montan en paralelo (de forma que el dispositivo funciona mientras funcione al menos una cualquiera de las dos componentes) ¿qué relación existirá entre el suceso D y los sucesos A y B? (Ver respuesta en el Anejo al final del Tema)

3.3 PROBABILIDAD

3.3.1 Concepto de Probabilidad

A todo suceso se le puede asociar un número comprendido entre 0 y 1 al que se denomina **probabilidad** de dicho suceso. Desde un punto de vista intuitivo la probabilidad de un suceso no es más que la proporción de individuos de la población considerada en los que se verifica dicho suceso.

Así, en el Ejemplo 1, la probabilidad del suceso "sacar un número par" no sería más que la proporción de veces que se obtiene un número par en la población de todos los lanzamientos que pudieran realizarse del dado considerado. En principio esta probabilidad podría diferir de un dado a otro, según que estuvieran mejor o peor equilibrados.

Si el conjunto de valores que puede tomar una variable aleatoria es finito (como en el caso del dado) y además por razones de simetría puede asumirse que la probabilidad es la misma para cada uno de dichos valores (o sea que la proporción de individuos en la población para cada valor es la misma para todos los valores), la probabilidad de un suceso resulta coincidir con el cociente entre el número de valores favorables a dicho suceso y el número de valores posibles.

Autoevaluación: Si un dado es simétrico ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par al lanzarlo? ¿Por qué?

Autoevaluación: En la población de todos los lanzamientos que se pueden realizar con una chincheta consideramos la variable aleatoria cuyos valores posibles son: 1 si la chincheta cae con la punta hacia arriba y 0 si la chincheta cae con la punta hacia abajo. Sea el suceso "la chincheta cae con la punta hacia arriba" y sea A su subconjunto asociado. ¿Cuántos elementos tiene E ? ¿Cuántos elementos tiene A? ¿Es la probabilidad de A el cociente entre casos favorables y casos posibles? ¿Cómo se podría calcular aproximadamente la probabilidad de A?

3.3.2 Propiedades de la Probabilidad

La probabilidad de un suceso asociado a un conjunto **A** la expresaremos como P(A).

De la definición que hemos dado se deduce inmediatamente que toda probabilidad satisface las siguientes propiedades:

1 - P(A) ∃ 0 por ser P(A) una frecuencia relativa en la población

2 - P(E) = 1 puesto que el suceso seguro se verifica en todos los individuos de la población.

3 - Si A y B son sucesos excluyentes P(A+B) = P(A) + P(B) puesto que el número de individuos que verifican A+B es la suma de los que verifican A más los que verifican B. Esto no sería cierto si A y B no fueran excluyentes, puesto que en la suma estaríamos contando dos veces algunos individuos. (Hay que ser consciente de que en la ecuación anterior los dos signos "+" que aparecen corresponden a operaciones conceptualmente diferentes: suma de sucesos y suma algebraica)

Nota: en un desarrollo axiomático de la Teoría de la Probabilidad las tres propiedades anteriores se enuncian como axiomas que definen el concepto de probabilidad de un suceso, y todas las propiedades que se exponen a continuación se deducen analíticamente como consecuencia de los axiomas anteriores.

4 - $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ como se deduce inmediatamente de **3** y **2** por ser A y $\overline{A}$ sucesos excluyentes cuya suma es E

5 - P(A) # 1 como se deduce de **4** y de **1**

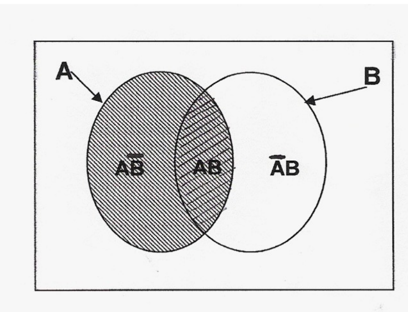
6 - P(**Φ**) = 0 como se deduce de **4** y de **2**, por ser **Φ** el suceso complementario de **E**.

Autoevaluación: Admitiendo como axiomas las propiedades 1,2 y 3 demuéstrense formalmente las propiedades 4, 5 y 6.

3.3.3 Probabilidad de la suma de sucesos

Autoevaluación: Supóngase el experimento consistente en lanzar simultáneamente dos dados que sean perfectamente simétricos. ¿Cuál sería la probabilidad del suceso A: "en el primer dado se obtiene un 6" y la del suceso B: "en el segundo dado se obtiene un 6"? ¿Son los sucesos A y B excluyentes? ¿Cuál sería el suceso A+B? ¿Sería su probabilidad mayor, menor o igual que 2/6? ¿Por qué?

Hemos visto que si dos sucesos A y B son excluyentes se cumple que P(A+B) = P(A) + P(B). ¿Qué sucede si A y B no son excluyentes?



Como se aprecia en la figura adjunta

$$(A+B) = A + \overline{A}B$$

donde A y $\overline{A}B$ son sucesos disjuntos. Por tanto

$$P(A+B) = P(A) + P(\overline{A}B) \qquad (1)$$

Por otra parte $B = AB + \overline{A}B$, siendo también disjuntos estos dos sucesos, por lo que $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$. Despejando $P(\overline{A}B)$ de esta expresión y sustituyéndolo en (1) se obtiene finalmente:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

que es la expresión general de la probabilidad de la suma de dos sucesos. (Obsérvese que la propiedad **3** es un caso particular de esta expresión, pues al ser A y B excluyentes AB resulta igual a Φ cuya probabilidad es cero)

El resultado expuesto es también lógico desde el punto de vista intuitivo, puesto que para obtener la frecuencia de individuos que verifican A+B, a la suma de los que verifican A más los que verifican B hay que restar los que verifican ambos (AB) para no contarlos dos veces.

Autoevaluación: aplicando el razonamiento intuitivo anterior obtener la expresión de la probabilidad de la suma de 3 sucesos $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

Aplicando reiteradamente el razonamiento intuitivo anterior, se llega a la expresión general de la probabilidad de la suma de N sucesos:

$$P(A_1+\ldots+A_N)=\sum_i P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k)-\ldots+(-1)^{N-1}P(A_1A_2\ldots A_N)$$

(Como veremos más adelante, en el caso de que los sucesos sean independientes, concepto que se define en el apartado 3.6, la probabilidad de la suma de N sucesos se calcula de forma más sencilla a través de la probabilidad del suceso contrario)

3.4 ESPACIOS DE PROBABILIDAD SIMÉTRICOS

En ciertos casos es razonable suponer, por consideraciones de simetría, que los diferentes resultados que pueden presentarse asociados a una determinada experiencia aleatoria son equiprobables. En estos casos la probabilidad de un suceso no es más que el cociente entre número de casos favorables y número de casos posibles, con lo que el cálculo de dicha probabilidad se reduce a un problema de conteo. En estos problemas son útiles los resultados clásicos de la Combinatoria.

Autoevaluación:En un examen sobre 20 temas se proponen 3 seleccionados al azar. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar un alumno que se ha estudiado sólo 8 temas? (Ver respuesta en el Anejo al final del Tema)

En una clase de 60 alumnos, ¿qué probabilidad hay de que al menos 2 de ellos tengan el mismo día de cumpleaños? (En la resolución del problema deben especificarse con precisión las hipótesis simplificadoras que se realicen para obtener el resultado, así como criticar dichas hipótesis y avanzar el sesgo que las mismas pueden originar en el resultado teórico obtenido) (Ver respuesta en el Anejo al final del Tema)

3.5 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Dados dos sucesos A y B, se define intuitivamente el concepto de probabilidad condicional de A dado B, y se simboliza como P(A/B), a la probabilidad de que se haya presentado el suceso A sabiendo que se ha presentado el suceso B.

P(A/B) sería por tanto la proporción de individuos que verifican el suceso A en la subpoblación constituida por los individuos que verifican el suceso B. De forma equivalente P(A/B) sería el cociente entre el número de individuos que verifican tanto A como B (o sea que verifican AB) dividido por el número de individuos que verifican B.

Autoevaluación: Sea la población constituida por los 131 individuos que respondieron a la encuesta realizada en clase y cuyos resultados están en el archivo <u>curs8990.sf3</u>.
¿Cuál es en dicha población la probabilidad del suceso CHICA?
¿Cuál es la probabilidad del suceso PESO < 55?
¿Cuál es la probabilidad del suceso (PESO < 55)/CHICA?
¿Cuál es la probabilidad del suceso CHICA/(PESO < 55)?

Como se deduce de la definición dada, y se comprueba en el ejercicio propuesto en la Autoevaluación, el valor de la probabilidad condicional P(A/B) puede obtenerse dividiendo P(AB) por P(B)

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Probabilidad del suceso producto

Autoevaluación: Al seleccionar un individuo al azar de los 131 encuestados ¿cuál es la probabilidad de que sea una chica de peso < 55 kgs? ¿Resulta igual al producto de la probabilidad de que sea chica por la probabilidad de que el peso sea < 55?

Una consecuencia inmediata de la definición de probabilidad condicional es la expresión que permite obtener la probabilidad del producto de dos sucesos

$$P(AB) = P(B) \times P(A/B)$$

o también

$$P(AB) = P(A) \times P(B/A)$$

Autoevaluación: comprobar las dos expresiones anteriores en el ejemplo manejado en la Autoevaluación anterior.

Como puede observarse no es cierto, en general que la probabilidad del producto de dos sucesos sea el producto de las probabilidades de ambos, como tampoco lo fue, en general, que la probabilidad de la suma de dos sucesos sea la suma de las probabilidades.

En el caso de la suma la fórmula general $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB)$ se simplificaba a la más sencilla (probabilidad de la suma igual a suma de las probabilidades) en un caso particular: si los sucesos considerados eran excluyentes.

De forma análoga la expresión general para la probabilidad del suceso producto $P(AB) = P(A)P(B/A)$ se simplifica a la más sencilla (probabilidad del producto igual al producto de probabilidades) en un caso particular muy importante: el de que los sucesos considerados sean **independientes**. En el apartado 3.6 se desarrollará este concepto.

Teniendo en cuenta que el producto de tres sucesos ABC es el producto del suceso A por el BC, y aplicando sucesivamente la fórmula de la probabilidad del producto de dos sucesos se obtiene:

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB)$$

expresión que se generaliza fácilmente a la probabilidad del producto de N sucesos.

3.6 TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sea un suceso B que se presenta siempre asociado a uno de los n sucesos $A_1, A_2,...,A_n$ mutuamente excluyentes en que se particiona **E**. Si se conocen las probabilidades $P(A_i)$ y las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$ es posible calcular P(B) a partir del siguiente razonamiento:

$$B = \mathbf{E}B = (A_1+A_2+...+A_n)B = A_1B + A_2B + ... + A_nB$$

y como los sucesos A_iB son mutuamente excluyentes al serlo los sucesos A_i

$$P(B) = P(A_1B) + ... + P(A_nB) = P(A_1)P(B/A_1) + ... + P(A_n)P(B/A_n)$$

fórmula que constituye el Teorema de la Probabilidad Total

Autoevaluación: En un fábrica de conservas se utilizan dos llenadoras de botes. La primera, que tiene una capacidad de 500 botes por hora, produce un 1% de botes defectuosos y la segunda, cuya capacidad es 1000 botes/hora, produce un 2% de botes defectuosos. ¿A qué probabilidades condicionales corresponden los valores 1% y 2%? ¿Si las dos máquinas funcionan a pleno rendimiento, cuál será el porcentaje de botes defectuosos producidos en total?

3.7 INDEPENDENCIA DE SUCESOS

Dos sucesos A y B se dice que son independientes si se verifica una cualquiera, y por lo tanto las ocho, de las siguientes condiciones equivalentes:

1. $P(A/B) = P(A)$
2. $P(A/B) = P(A/\overline{B})$
3. $P(B/A) = P(B)$
4. $P(B/A) = P(B/\overline{A})$
5. $P(AB) = P(A)P(B)$
6. $P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$
7. $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B)$
8. $P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$

Autoevaluación: Comprobar que una cualquiera de las 8 condiciones anteriores implica a las otras siete. (Ver respuesta en el Anejo al final del Tema)

Autoevaluación: En una baraja española (40 cartas, 10 de cada palo) sea el experimento aleatorio sacar una carta al azar y considérense los sucesos siguientes:
A = sacar un as
B = sacar un oro
Comprobar que se verifican las 8 condiciones anteriores (realmente bastaría con comprobar que se verifica una cualquiera de ellas, puesto que una implica a todas las demás) Si se trata de adivinar si ha salido un as ¿sirve para algo saber que ha salido un oro?, ¿por qué?

Autoevaluación: En el experimento aleatorio consistente en lanzar al azar un dado simétrico sean los sucesos:
A = obtener un número par
B = obtener un número mayor que 3
¿Son independientes los dos sucesos?

Autoevaluación: Sea la población constituida por todos los jóvenes españoles entre 20 y 30 años. Enúnciense parejas de sucesos que se consideren prácticamente independientes (es decir en los que $P(A/B)$ debe ser muy parecida a $P(A/\overline{B})$), y parejas de sucesos que se consideren claramente dependientes.

Autoevaluación: Sea la población constituida por las 50 naranjas de una caja, de las que el 10% están heladas. Se extrae una primera naranja al azar y sea A el suceso "la naranja está helada". Se extrae a continuación (sin volver a reponer la primera naranja extraída) una segunda naranja y sea B el suceso "la segunda naranja está helada". Calcular P(A), P(B), P(B/A) y P(B/No-A). ¿Son los dos sucesos independientes?
Repetir los cálculos anteriores suponiendo que en este caso la población la constituyen las 100.000 naranjas que hay en un camión y de las que el 10% están heladas. ¿Puede considerarse en este caso que, pese a no reponer la primera naranja, los sucesos A y B son "prácticamente" independientes?
(Ver respuesta en el Anejo al final del Tema)

Autoevaluación: Sean dos sucesos A y B que son excluyentes. ¿Cuál de las tres afirmaciones siguientes es cierta ? :
A y B son siempre independientes
A y B no son nunca independientes
A y B pueden ser independientes en algunos casos y no serlo en otros.
(Nota :Se supondrá que A y B tienen probabilidades distintas de cero).

El concepto de independencia se generaliza a n sucesos. Un conjunto de n sucesos $A_1, A_2 ... A_n$ son independientes si para cualquier subconjunto de estos sucesos se verifica que la probabilidad del suceso producto es el producto de las probabilidades de los sucesos individuales considerados.

3.8 TEOREMA DE BAYES

Se presentan a veces situaciones en las que E está particionado en n sucesos A_1, $A_2, ... A_n$ mutuamente excluyentes conociéndose las probabilidades $P(A_i)$ (que obviamente deben sumar 1). Se conocen también las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$ de cierto suceso condicionado a cada uno de los A_i, y se desea finalmente obtener la probabilidad $P(A_k/B)$ de uno de los sucesos considerados A_k sabiendo que se ha presentado B.

<u>Ejemplo</u>: el 30% de los enfermos de hepatitis que ingresan en un hospital tienen hepatitis obstructiva que exige una intervención quirúrgica, mientras que el otro 70% tienen hepatitis infecciosa que puede curarse simplemente con reposo y medicación. (Estos serían los dos sucesos A_1 y A_2 en los que se particiona toda la población de ingresos de hepatitis).
Para discernir entre ambas situaciones se realiza una determinada prueba clínica que puede dar positiva (éste sería el suceso B) o negativa. Se sabe que la probabilidad de que la prueba resulte positiva es 0.95 cuando los enfermos tienen hepatitis obstructiva y 0.10 cuando la tienen infecciosa (éstas serían las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$).
Sabiendo que en un enfermo la prueba ha dado positiva ¿cuál es la probabilidad de que tenga realmente una hepatitis obstructiva? (O sea cuánto vale $P(A_1/B)$).

Un resultado, conocido como Teorema de Bayes, permite el cálculo de esta probabilidad.

En efecto:

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}$$

Y como, por el Teorema de la Probabilidad Total visto en el apartado 4.5,

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+...+P(A_n)P(B/A_n)$$

sustituyendo esta expresión en el denominador de la anterior se obtiene el resultado final, conocido como Teorema de Bayes:

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

Autoevaluación: Calcular aplicando el Teorema de Bayes la probabilidad solicitada al final del ejemplo mencionado sobre ingresos de enfermos con hepatitis.
Supongamos que en el hospital se producen unos 150 ingresos anuales por hepatitis, y que se opera a todos aquéllos que dan positivo en la prueba mencionada. ¿Cuántos diagnósticos erróneos se producirán en promedio anualmente? ¿En promedio cuántas intervenciones de hepatitis que no debieran haberse realizado se practicarán anualmente? Si la prueba da negativa en un enfermo ¿cuál es pese a ello la probabilidad de que realmente tenga una hepatitis obstructiva?

Autoevaluación: En el ejemplo sobre llenadoras de botes supongamos que se selecciona al azar un bote de la producción final y se constata que es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido llenado en la primera de las dos máquinas?

3.A AUTOEVALUACIONES RESUELTAS Y EJERCICIOS

3.A.1 Respuesta a algunas Autoevaluaciones

Autoevaluación: Un determinado dispositivo se fabrica a partir de dos componentes C_A y C_B. Sean los sucesos:
A: la componente C_A funciona más de 1000 horas sin fallar
B: la componente C_B funciona más de 1000 horas sin fallar
D: el dispositivo conjunto funciona más de 1000 horas sin fallar
Si las dos componentes se montan en serie (de forma que el dispositivo falla en cuando lo hace una cualquiera de las dos componentes) ¿qué relación existirá entre el suceso D y los sucesos A y B?
Si las dos componentes se montan en paralelo (de forma que el dispositivo funciona mientras funcione al menos una cualquiera de las dos componentes) ¿qué relación existirá entre el suceso D y los sucesos A y B?

Componentes en serie: dado que el suceso D se verifica si, y sólo si, se verifican los dos sucesos A y B $\Rightarrow$ D = AB

Componentes en paralelo: dado que el suceso D se verifica si, y sólo si, se verifica al menos uno de los dos sucesos A y B $\Rightarrow$ D = A + B

Autoevaluación: Comprobar que una cualquiera de las 8 condiciones de independencia de sucesos implica a las otras siete.

Es elemental demostrar, a partir de que P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B), que las tres condiciones P(A/B) = P(A), P(AB) = P(A)P(B) y P(B/A) = P(B) se implican mutuamente

Para no hacer muy larga esta respuesta, de las restantes implicaciones demostraremos sólo que la condición P(AB) = P(A)P(B) implica que $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B})$

En efecto, como $(\overline{A}\,\overline{B})$ es el suceso contrario de (A+B)

$P(\overline{A}\,\overline{B})$ = 1 – P(A+B) = 1 – (P(A) +P(B) – P(AB)) = 1 – (P(A) +P(B) – P(A)P(B)) =
= (1-P(A)) (1-P(B)) = $P(\overline{A})P(\overline{B})$

Autoevaluación: Sea la población constituida por las 50 naranjas de una caja, de las que el 10%, o sea 5, están heladas. Se extrae una primera naranja al azar y sea A_1 el suceso "la naranja está helada". Se extrae a continuación (sin volver a reponer la primera naranja extraída) una segunda

naranja y sea A_2 el suceso "la segunda naranja está helada". ¿Son los dos sucesos independientes?
Repetir los cálculos anteriores suponiendo que en este caso la población la constituyen las 100.000 naranjas que hay en un camión y de las que el 10% están heladas. ¿Puede considerarse en este caso que, pese a no reponer la primera naranja, los sucesos A_1 y A_2 son "prácticamente" independientes?

Por tratarse de un espacio de probabilidad simétrico, puesto que todas las naranjas tienen la misma probabilidad de ser extraídas, estén heladas o no, las probabilidades pueden calcularse a partir del cociente entre casos favorables y casos posibles.

Es obvio, por tanto, que $P(A_1) = \frac{5}{50} = 0.10$

¿Cuánto vale $P(A_2)$? Es intuitivo que $P(A_2)$ deber ser igual a $P(A_1) = 0.10$, puesto que la probabilidad de que la segunda naranja esté helada no tiene por qué ser mayor o menor que la de que lo esté la primera.

Aquéllos que no sigan este razonamiento intuitivo, pueden llegar al mismo resultado aplicando el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2/\overline{A_1}) = \frac{5}{50}\frac{4}{49} + \frac{45}{50}\frac{5}{49} = 0.10$$

Como $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{5}{50}\frac{4}{49} = 0.082$, es diferente de $P(A_1)P(A_2) = 0.01$, los dos sucesos no son independientes

<u>Nota</u>: los sucesos sí que habrían resultado independientes si se hubiera vuelto a introducir en la caja la primera naranja antes de extraer la segunda, o sea si las extracciones fueran "con reemplazamiento". En la práctica, sin embargo, cuando se muestrea una población finita seleccionando al azar un subconjunto de individuos, las extracciones son siempre "sin reemplazamiento" (se puede demostrar, y es intuitivo, que esta operativa es más informativa) por lo que los sucesos asociados a los resultados de cada extracción serán dependientes.

Sin embargo, si el tamaño de la población muestreada es grande en relación al tamaño de la muestra, dichos sucesos pueden considerarse a efectos prácticos como si fueran independientes, tal como se constata en la segunda parte de la Autoevalución

En este caso se tendrá $P(A_1) = \frac{10.000}{100.000} = 0.1$ y $P(A_2) = P(A_1) = 0.1$ como antes.

En cuanto a $P(A_1A_2)$ su valor será $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{10.000}{100.000}\frac{9.999}{99.999} = 0.0099991$ que es prácticamente igual que 0.01, que es el valor que se hubiera obtenido si los dos sucesos fueran independientes.

Por estos motivos es muy frecuente en estudios estadísticos la observación: "Considerar que el tamaño de la población muestreada es suficientemente grande en relación al tamaño de la muestra como para que los resultados puedan considerarse independientes"

3.A.2 Ejercicios resueltos

1 *En un examen sobre 20 temas se proponen 3 seleccionados al azar. ¿Qué probabilidad tiene de aprobar un alumno que se ha estudiado sólo 8 temas?*

En este caso la población considerada es la de todos los exámenes que pueden ponerse en las condiciones expuestas. Existen en total $\binom{20}{3}$ = 1140 exámenes diferentes posibles, y por la simetría que genera el hecho de que los temas se sacan al azar (se sobreentiende que todos los temas tienen la misma probabilidad de salir en estas extracciones), la probabilidad de aprobar es simplemente el cociente entre el número de exámenes en los que el alumno aprobaría, sabiéndose sólo 8 de los 20 temas, y el número total de exámenes. Se trata, por tanto simplemente de contar este número de exámenes favorables al alumno

El alumno aprobará si se sabe los 3 temas que salen: número de exámenes $\binom{8}{3}$=56

El alumno aprobará también si se sabe 2 de los temas pero no ha estudiado el otro: número de casos $\binom{8}{2}\binom{12}{1}$=336

Por tanto,

Probabilidad de aprobar = $\frac{56+336}{1140}$ = 0.344

__2__ En una clase de 60 alumnos, ¿qué probabilidad hay de que al menos 2 de ellos tengan el mismo día de cumpleaños? (En la resolución del problema deben especificarse con precisión las hipótesis simplificadoras que se realicen para obtener el resultado, así como criticar dichas hipótesis y avanzar el sesgo que las mismas pueden originar en el resultado teórico obtenido)

Es este un problema clásico que pone de manifiesto que muy frecuentemente se cometen gruesos errores al calcular intuitivamente ciertas probabilidades. En nuestra experiencia docente hemos constatado que la inmensa mayoría de los alumnos piensan que la probabilidad solicitada es baja (entre 0.1 y 0.2) cuando realmente, como vamos a comprobar, la probabilidad es muy elevada (superior a 0.99)

Para resolver el problema vamos a hacer las hipótesis simplificadoras de que todos los años tienen 365 días (no considerando, por tanto, la peculiaridad de los años bisiestos) y de que todos los días del año son igual de probables para que se produzcan nacimientos. (Estas hipótesis se analizan críticamente más adelante)

El suceso "coinciden al menos 2 cumpleaños" es el contrario del suceso "no coincide ningún cumpleaños", siendo muy sencillo calcular la probabilidad de este último.

En efecto, cada uno de los 60 alumnos "elige" para nacer un día entre los 365 del año. ¿Cuántas situaciones diferentes pueden darse? Obviamente 365x365x...x365 = 365^{60}. De acuerdo con nuestras hipótesis todas estas situaciones son igual de probables.

¿En cuántas de estas situaciones no coincidirá ningún cumpleaños? Como el 2º alumno no puede "elegir" el día "elegido por el 1ª, el 3º no puede elegir los días elegidos por el 1º ni por el 2º, etcétera ... los casos favorables a que no coincidan cumpleaños serán 365x364x363x...x306 (un producto de 60 términos)

Por lo tanto:

P(coincidencia) = 1 – P(no coincidencia) = 1 - $\frac{365\times 364\times\ldots\times 306}{365^{60}}$ = 0.9941

Es, por tanto, muy improbable que en una clase de 60 alumnos no haya al menos 2 que cumplan años el mismo día

El resultado obtenido se deriva de unas hipótesis que hemos hecho y que quizás no sean muy realistas. Vamos a analizarlas.

No parece razonable pensar que el hecho de que cada 4 años haya un día adicional pueda haber influido mucho en el resultado. (De hecho repitiendo los cálculos con 366 días posibles en vez de 365 el resultado obtenido, 0.9940, es casi idéntico)

La hipótesis de que todos los días son igual de probables es, sin embargo muy cuestionable. Es perfectamente razonable concebir que los nacimientos se concentren más en ciertas épocas del año (en vísperas de vacaciones, por ejemplo) o ciertos días de la semana (por ejemplo los viernes). Pero es importante constatar que, si esto es así, la probabilidad de coincidencia será ¡todavía más elevada! que la hallada bajo la hipótesis de equiprobabilidad de los días del año.

En consecuencia, a efectos de tomar decisiones en la práctica (como, por ejemplo, apostar dinero a favor de que se produzca esa coincidencia en un determinado grupo de 60 personas) el cálculo realizado proporciona la información útil al respecto

3 *De una partida constituida por un gran número de piezas se han seleccionado 10 piezas al azar. Si las 10 piezas resultaron correctas ¿qué puede afirmarse con una razonable seguridad sobre la proporción de las piezas de la partida que son correctas?*

Este ejercicio plantea realmente una pregunta abierta. Más que dar una respuesta "correcta", se trata de analizar la forma de razonar sobre la cuestión propuesta utilizando el Cálculo de Probabilidades.

Por supuesto, que con absoluta seguridad de acertar lo único que se podría decir es que al menos en la partida hay 10 piezas correctas. Pero, si estamos dispuestos a admitir una pequeña probabilidad de equivocarnos en nuestra afirmación, ¿podemos precisar más nuestra idea sobre la calidad de la partida?

Por ejemplo, ¿es razonable afirmar que la partida tiene seguramente menos de un 50% de piezas defectuosas?. Si la partida tuviera un 50% de piezas defectuosas, la probabilidad de que al extraer 10 al azar resultaran todas correctas sería 0.5^{10} que es menor que el 1 por mil. Dicho de otra forma, si la partida tuviera un 50% de piezas defectuosas sería muy poco probable obtener, como ha sucedido, que en una muestra de 10 todas sean correctas. Parece razonable, por tanto, afirmar con mucha seguridad que la partida tiene menos de un 50% de piezas defectuosas.

¿Y menos de un 20% de piezas defectuosas? Si la partida tuviera un 20% de piezas defectuosas, la probabilidad de que al extraer 10 al azar resultaran todas correctas sería $0.8^{10} = 0.11$, que es una probabilidad mayor, pero aun relativamente pequeña. Quizás pueda afirmarse que la partida tiene menos de un 20% de piezas defectuosas, pero en este caso el grado de seguridad de nuestra afirmación es obvio que va a ser menor

¿Y menos de un 10% de piezas defectuosas? Si la partida tuviera un 10% de piezas defectuosas, la probabilidad de que al extraer 10 al azar resultaran todas correctas sería $0.9^{10} = 0.35$, que es una probabilidad ya relativamente alta (corresponde a un suceso que se presenta una vez de cada tres). Parecería por tanto arriesgado, en base a la información que hay en la muestra, comprometerse afirmando que la partida tiene menos de un 10% de piezas defectuosas.

3.A.3 Ejercicios adicionales

4 *En la población de los estudiantes universitarios españoles se definen los siguientes sucesos:*
<u>Suceso A</u>: estudiante varón, cuya probabilidad es P(A)=0.45
<u>Suceso B</u>: estudiante alto (estatura>1.75) cuya probabilidad es P(B)=0.40
<u>Suceso C</u>: estudiante muy inteligente (c.i.>100) cuya probabilidad es P(C)=0.10

Se sabe que el suceso C es independiente de A y de B, y que el 70% de los chicos son altos. Calcular qué porcentaje de los estudiantes serán chicas, altas y muy inteligentes

5 *Un dispositivo está formado por **n** componentes independientes conectadas en paralelo. cada componente tiene una fiabilidad del 40% a 1000 horas (esta frase es la forma técnica habitual de expresar que P(componente dure más de 1000 horas) = 0.40) Calcular el valor mínimo que debe tener **n** si se desea que la fiabilidad del dispositivo a las 1000 horas sea superior al 99%*

6 *4 componentes A, B, C y D tienen una fiabilidad a 500 horas del 90%, 95%, 97% y 99% respectivamente. Se diseña un dispositivo, conectando en paralelo por una parte A y B y por otra B y C, y conectando luego en serie estos dos montajes. Calcular la fiabilidad del dispositivo a 500 horas*

7 *Se escriben N cartas y los N sobres correspondientes, y luego se introducen al azar las cartas en los sobres. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una carta vaya en el sobre que le corresponde?*
(Sugerencia para resolver este problema clásico: definir los N sucesos A_i={la carta i-ésima va en el sobre que le corresponde} y hallar la probabilidad del suceso $A_1+...+A_N$ por la expresión general vista al final del apartado 4.3.2. Observar que no es posible hallar esta probabilidad por el camino más rápido de calcular la del suceso contrario, ya que al no ser los sucesos A_i, ni sus contrarios, independientes, la probabilidad del producto no se simplifica al producto de las probabilidades)

8 *Para promocionar sus productos, una empresa incluye en las cajas en las que los vende posters que elige al azar entre tres tipos diferentes. ¿Cuántas cajas hay que comprar como mínimo, si se quiere tener una probabilidad superior a 0.95 de reunir la colección completa?*
(Sugerencia: definir los sucesos A_1={en las N cajas hay posters de un sólo tipo}, y A_2={en las N cajas hay posters de sólo dos tipos}. Hallar, en función de N, la probabilidad del suceso pedido, teniendo en cuenta que éste es el contrario de $A_1 + A_2$, y ver el valor mínimo de N para el que dicha probabilidad es > 0.95)

9 *Una empresa tiene dos máquinas A y B para producir ciertas piezas. De sus estadísticas sabe que A, que produce 1000 piezas por hora, origina un 5 por mil de piezas defectuosas, mientras que B, que produce 2000 piezas por hora, origina un 3 por mil de piezas defectuosas. Tras incorporar una nueva máquina C, que produce 2000 piezas por hora, constata que la proporción de piezas defectuosas en el total de su producción es el 4 por mil. ¿Qué proporción de piezas defectuosas produce la nueva máquina C?*

10 *En el ejemplo anterior se ha seleccionado al azar una de las tres máquinas, e inspeccionado la primera pieza que produce, y que resulta ser defectuosa.¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente pieza producida por la misma máquina sea también defectuosa?*